

I - Fort Boyard : l'épreuve de la cloche

1) Pour un mouvement circulaire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \ell_0 \vec{u}_r \\ \vec{v} = \ell_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{a} = \ell_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - \ell_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r \end{cases}$$

2) Puisque l'axe x est descendant et puisque $\mathcal{E}_p(\theta = \pi/2) = 0$, on a :

$$\mathcal{E}_p = -mgX + cte \quad \text{avec : } cte = 0 \quad \text{et } X = \ell_0 \cos(\theta)$$

On en déduit :

$$\mathcal{E}_p = -mg\ell_0 \cos(\theta)$$

3) On applique le PFD sur le système de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le système est soumis à son poids et à la tension du câble.

$$\vec{P} = mg \vec{u}_x = mg [\cos(\theta) \vec{u}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta] \quad \text{et} \quad \vec{T} = -T \vec{u}_r$$

Le projette le PFD selon \vec{u}_θ .

$$m\ell_0 \ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0}$$

4) Dans le cas des petites oscillation, $\theta \ll 1$ rad donc : $\sin(\theta) \simeq \theta$. On trouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 .

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 5,3 \text{ s}}$$

La solution s'écrit :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Avec les conditions initiales :

$$\theta(0) = A = \theta_0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0 B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$$

5) Le mouvement n'étant plus circulaire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \ell \vec{u}_r \\ \vec{v} = \dot{\ell} \vec{u}_r + \ell \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{a} = (2\dot{\ell}\dot{\theta} + \ell\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + (\ddot{\ell} - \ell\dot{\theta}^2) \vec{u}_r \end{cases}$$

Le PFD projeté selon \vec{u}_θ donne :

$$m2\dot{\ell}\dot{\theta} + m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\dot{\ell}(t)}{\ell(t)} \dot{\theta} + \frac{g}{\ell(t)} \sin(\theta) = 0}$$

6) Entre $M_{n,1}$ et $M_{n,2}$, la longueur du pendule est constante donc l'énergie mécanique se conserve. Sur cette partie du mouvement, on a donc :

$$\mathcal{E}_m = cte \quad \text{avec : } \mathcal{E}_p = -mg\ell_0(1 + \alpha) \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$$

La vitesse au point $M_{n,1}$ étant nulle :

$$0 - mg\ell_0(1 + \alpha) \cos(\theta_n) = \frac{1}{2}mv_{n,2}^2 - mg\ell_0(1 + \alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{n,2} = \sqrt{2g\ell_0(1 + \alpha)} [1 - \cos(\theta_n)]^{1/2}}$$

On en déduit : $\beta = 1 + \alpha$ et $\gamma = 1/2$

7) Le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \vec{L}_{n,2} = m\ell_0 (1 + \alpha) v_{n,2} \vec{u}_z \\ \vec{L}_{n,3} = m\ell_0 (1 - \alpha) v_{n,3} \vec{u}_z \end{cases}$$

Puisque le moment cinétique se conserve :

$$\vec{L}_{n,2} = \vec{L}_{n,3} \Rightarrow v_{n,3} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} v_{n,2} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \sqrt{2g\ell_0 (1 + \alpha)} [1 - \cos(\theta_n)]^{1/2}$$

8) Par conservation de l'énergie mécanique entre $M_{n,3}$ et $M_{n,4}$, on a :

$$\frac{1}{2} m v_{n,3}^2 - mg\ell_0 (1 - \alpha) = 0 - mg\ell_0 (1 - \alpha) \cos(\theta_{n+1})$$

On remplace $v_{n,3}$ par l'équation obtenue précédemment et on obtient :

$$1 - \cos(\theta_{n+1}) = \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^3 [1 - \cos(\theta_n)]$$

Donc : $\delta = 3$

9) On a :

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^3 > 1 \Rightarrow 1 - \cos(\theta_{n+1}) > 1 - \cos(\theta_n) \Rightarrow \cos(\theta_{n+1}) < \cos(\theta_n)$$

On adonc bien l'amplitude des osculations qui augmentent :

$$\cos(\theta_{n+1}) < \cos(\theta_n) \Rightarrow \theta_{n+1} > \theta_n$$

10) On remarque que la suite est une suite géométrique de raison q :

$$q = \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^3 \Rightarrow 1 - \cos(\theta_n) = q^n [1 - \cos(\theta_0)]$$

On veut atteindre $\theta_N = \pi/2$ soit $\cos(\theta_N) = 0$. Ainsi,

$$1 = \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^{3N} [1 - \cos(\theta_0)] \Rightarrow N = -\frac{\ln(1 - \cos(\theta_0))}{3 \ln\left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\right)} \simeq 9,4$$

Il faudra donc 5 allers-retours.

----- Fin de la partie I -----

II - Mouvement d'une goutte d'eau autour d'une aiguille

II.1 - Champ et potentiel électrostatiques produits par l'aiguille

11) Le lien entre champ et potentiel électrostatique est donné par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Rightarrow -\frac{K}{r} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V(r) = K \ln(r) + cte$$

La constante étant arbitraire, on peut la prendre nulle.

II.2 - Étude du mouvement de la goutte

12) La goutte de masse m et de charge q est soumise uniquement à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{E} = -\frac{qK}{r} \vec{u}_r$$

Cette force n'est pas centrale car elle est dirigée selon le vecteur \vec{u}_r des coordonnées cylindriques et non pas des coordonnées sphériques.

13) Attention : la force n'étant pas centrale, son moment par rapport à O n'est pas nul (dans le cas général).

On applique le PFD sur la goutte, dans le référentiel de l'aiguille supposé galiléen, que l'on projette selon l'axe z .

$$m\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = cte \underset{c}{=} 0 \Rightarrow \boxed{z(t) = cte}$$

Le mouvement est donc plan (mais uniquement parce que la vitesse initiale n'a pas de composante selon \vec{u}_z). Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agit du plan $z = 0$.

14) Dans ces conditions, on rappelle :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

On en déduit le moment cinétique selon z :

$$L_z = [\vec{OM} \wedge m \vec{v}] \cdot \vec{u}_z = mr^2 \dot{\theta}$$

Le moment de la force selon z est nul :

$$\mathcal{M}_z = [\vec{OM} \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u}_z = 0$$

Le TMC donne donc :

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = cte \Rightarrow mr^2 \dot{\theta} = mr_0 v_0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2}}$$

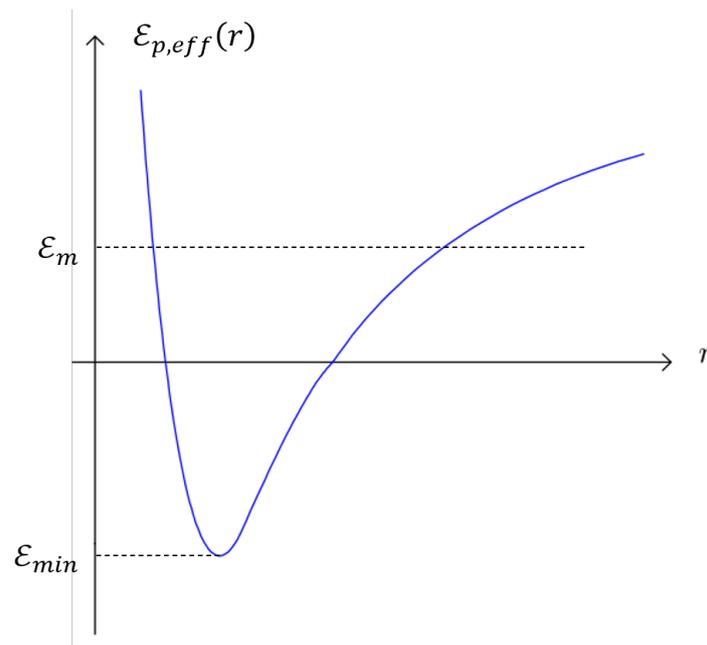
15) L'énergie mécanique vaut :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + qV = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + qK \ln(r)$$

On en déduit :

$$\boxed{\alpha = \frac{mr_0^2 v_0^2}{2} \quad \text{et} \quad \beta = qK}$$

16) On constate que la fonction diverge en 0 et en ∞ . On en déduit :



Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{min}$ alors le mouvement est circulaire. Si $\mathcal{E}_m > \mathcal{E}_{min}$ alors le mouvement est nécessairement lié : il n'existe pas d'énergie mécanique \mathcal{E}_m telle que $\mathcal{E}_m > \mathcal{E}_{p,eff}(r \rightarrow \infty)$. Il ne peut donc pas y avoir d'état de diffusion.

17) Pour le mouvement circulaire, le TMC nous assure que :

$$\dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2} = \frac{v_0}{r_0} = cte$$

L'accélération vaut donc :

$$\overrightarrow{OM} = r_0 \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = r_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta = v_0 \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{v_0^2}{r_0} \vec{u}_r$$

Le PFD donne alors :

$$-\frac{mv_0^2}{r_0} = -\frac{qK}{r_0} \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{qK}{m}}}$$

La trajectoire correspond à un minimum d'énergie potentielle effective, elle est donc stable.

18) Le mouvement n'est plus plan puisque la vitesse initiale possède une composante non nulle selon \vec{u}_z . Si $\dot{z}_0 \ll v_0$ on peut considérer que la trajectoire est circulaire autour de l'aiguille, mais que le plan du cercle dérive légèrement vers les z croissants ou décroissants (selon le signe de $\dot{z} = cte$). Le mouvement est alors hélicoïdal.

II.3 - Prise en compte des frottements de l'air

19) Puisque la trajectoire est localement circulaire, tous les résultats précédent s'applique. On a donc en particulier :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{qK}{m}} = cte}$$

20) Le théorème de la puissance mécanique donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(f) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}mv^2 + qK \ln(r) \right] = -k\vec{v} \cdot \vec{v} \Rightarrow qK \frac{\dot{r}}{r} = -kv^2 \Rightarrow \boxed{\dot{r} = -\frac{k}{m} r}$$

On a bien la forme demandée avec :

$$\boxed{\tau = \frac{m}{k} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3k} = 49,3 \text{ s}}$$

21) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. La solution s'écrit :

$$\boxed{r(t) = r_0 e^{-t/\tau}}$$

La goutte touche l'aiguille lorsque $r = R$. Ainsi,

$$\boxed{T_{\text{chute}} = \tau \ln\left(\frac{r_0}{R}\right) = 79 \text{ s}}$$

Cette valeur est raisonnable (quelques dizaines de secondes) et rend bien compte des observations.

22) D'après l'énoncé, un tour l'effectue en $T_{\text{tour}} = 3 \text{ s}$. Ainsi, la variation relative de rayon vaut :

$$\frac{r(t + T_{\text{tour}}) - r(t)}{r(t)} = e^{-T_{\text{tour}}/\tau} - 1 = -0,06$$

On trouve une chute de $\boxed{6\%}$, c'est tout de même non négligeable, mais l'approximation faite reste acceptable.

23) Calculons le rapport des normes des forces sur le premier tour ($r = r_0$).

$$\frac{P}{F} = \frac{mg}{qK/r_0} = \frac{mg}{mv_0^2/r_0} \quad \text{avec :} \quad v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_{\text{tour}}} \Rightarrow \boxed{\frac{P}{F} = \frac{gT_{\text{tour}}^2}{4\pi^2 r_0} = 670 \gg 1}$$

C'est impossible, le poids domine largement la force électrostatique.

----- Fin de la partie II -----